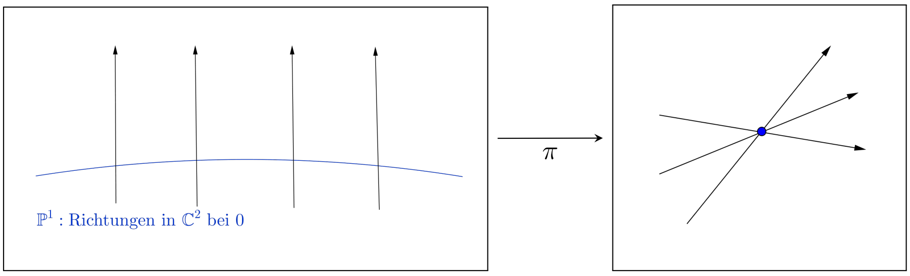
In der letzten Vorlesung hatten wir über Aufblasungen geredet.



$$\tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

- Wir beschreiben nun eine Aufblasung mit zwei Karten. Dabei verwenden wir nun sowohl im Bild als auch im Urbild x und y statt wie zuvor $u, v; u', v'$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ I: (x, y) &\longmapsto (xy, y) \\ II: (x, y) &\longmapsto (x, xy). \end{aligned}$$

  Diese sind die sogenannten Quadratischen Transformationen.

- Nun sei $f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ oder $f(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Dann nennt man

$$\begin{tikzcd} & f(XY, Y) \\ f(X, Y) \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & \\ & f(X, XY) \end{tikzcd}$$

  die total Transformierten. Für ein Monom $X^a Y^b$ von f erhalten wir also dann $X^a Y^{a+b}$ und $X^{a+b} Y^b$. Allgemeiner können wir für $m := \mathrm{mult}_0(f)$

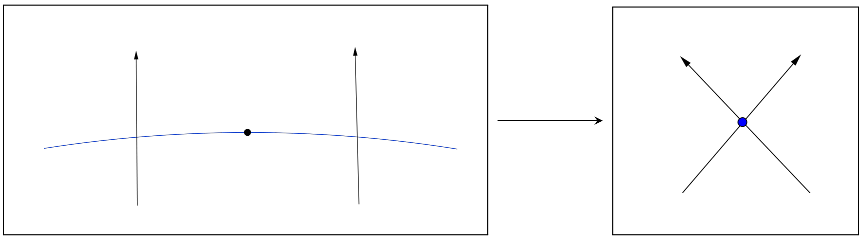
$$\begin{aligned} f(XY, Y) &= Y^m \tilde{f}(X, Y), \\ f(X, XY) &= X^m \tilde{f}(X, Y) \end{aligned}$$

  schreiben. $\tilde{f}$ wird oft als die strikt Transformierte von f bezeichnet. Häufig ist die strikt Transformierte deutlich einfacher als das ursprüngliche f.

Wir werden nun im Folgenden einige Beispiele hierzu nennen. Zuerst beschränken wir uns in Beispiel 1) bis 6) auf zeichnerische Beispiele, eher wir in Beispiel 7) und 8) gänzlich ohne Bilder und Zeichnungen auskommen werden.

Beispiel.

1)

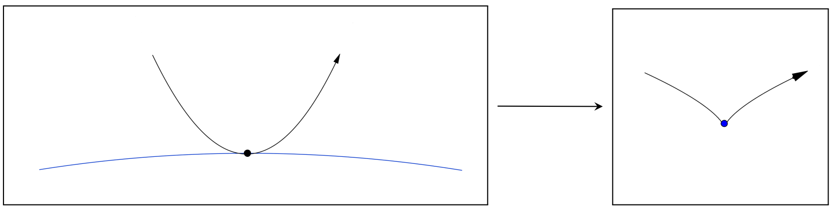


1. Karte : $X^2Y^2 - Y^2 = Y^2(X^2 - 1)$

2. Karte : $X^2 - X^2Y^2 = X^2(Y^2 - 1)$

$X^2 - Y^2$

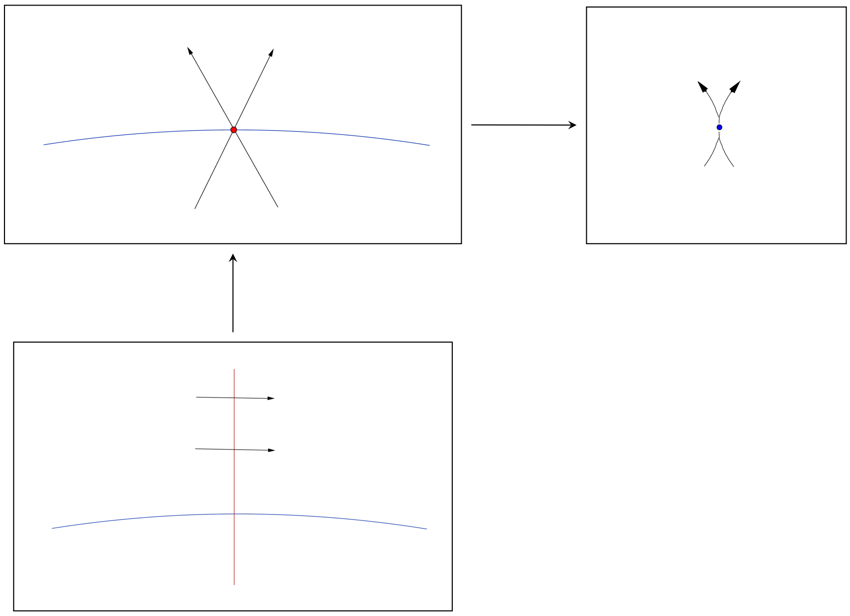
2)



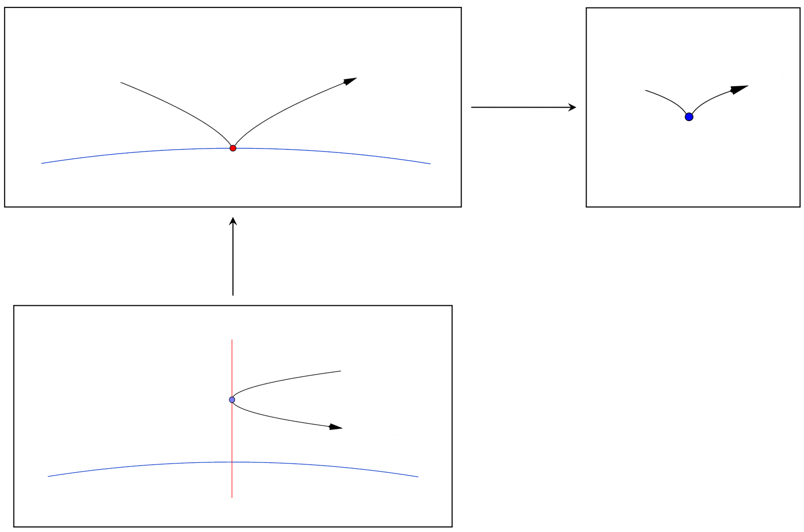
1. Karte : $X^2Y^2 - Y^3 = Y^2(X^2 - Y)$

$X^2 - Y^3$

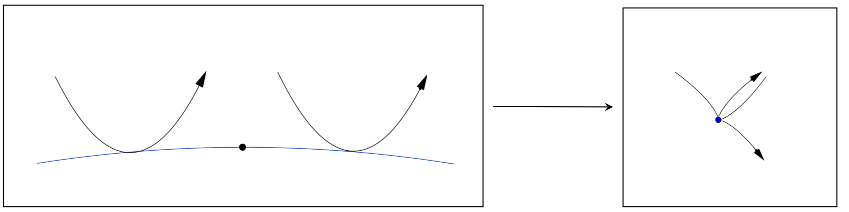
3) Nun blasen wir die Kurve $X^2 - Y^4$ auf. Wir erhalten hierbei $X^2Y^2 - Y^4 = Y^2(X^2 - Y^2)$. Es wird dabei ersichtlich, dass nach einmaligem Aufblasen die Stelle mit Schnittmultiplizität 2 zu einer Stelle mit Schnittmultiplizität 1 wird. Das heißt, wir können hier erneut Aufblasen.



4) Praktisch analog erhalten wir aus $X^2 - Y^5$ durch Aufblasen $X^2Y^2 - Y^5 = Y^2(X^2 - Y^3)$. Auch hier können wir ein weiteres Mal Aufblasen.

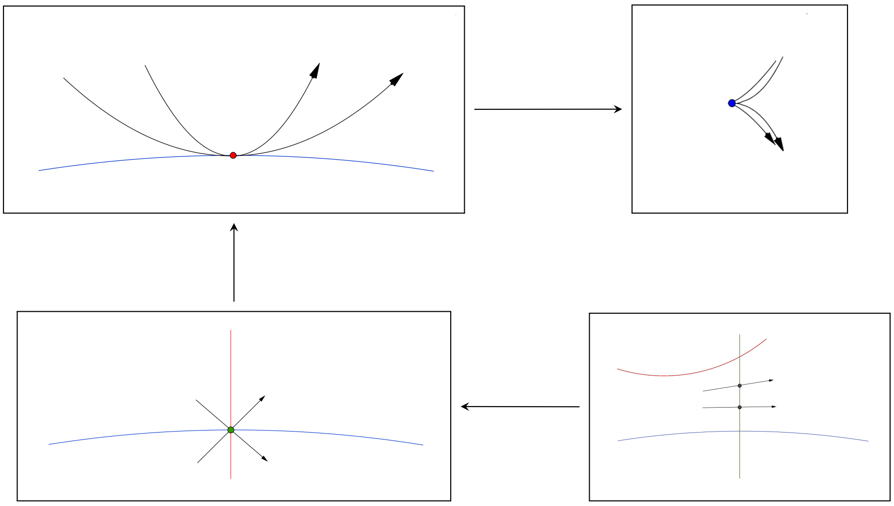


5) Für die zwei Kuspen $(X^2 - Y^3)(X^3 - Y^2)$ erhalten wir mit Beispiel 2) und 3):



$(X^2 - Y^3)(X^3 - Y^2)$

6) Nun wollen wir noch ein letztes Beispiel graphisch behandeln. Hierbei benötigen wir gar 3 Aufblasungen um zu einem Ergebnis ohne Berührungen zu kommen. Wie zuvor werden die Berührungen bei jeder Aufblasung weniger.



7) Jetzt werden wir ein Beispiel erläutern, in dem wir in jedem Schritt die strikt Transformierte des jeweiligen Polynoms berechnen. Dabei bezeichnen wir mit $f \rightsquigarrow \tilde{f}$ das Berechnen der strikt Transformierten von f.
$X^5 - Y^{17} \rightsquigarrow X^5 - Y^{12} \rightsquigarrow X^5 - X^7 \rightsquigarrow X^5 - Y^2 = -Y^2 + X^5 \rightsquigarrow -Y^2 + X^3 \rightsquigarrow -Y^2 + X$

8) Wenn wir nun statt $X^a - Y^b$ (a, b) bzw. (b, a) schreiben, erreichen wir im folgenden Beispiel:
$(7, 25) \rightsquigarrow (7, 18) \rightsquigarrow (7, 11) \rightsquigarrow (7, 4) \leftrightarrow (4, 7) \rightsquigarrow (4, 3) \leftrightarrow (3, 4) \rightsquigarrow (3, 1)$.
Man erkennt nun die Parallelen zu dem euklidischen Algorithmus. Denn man kann das Beispiel auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} 25 &= 3 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Wir haben anhand der Bilder sehr gut gesehen, dass wir mit dem Aufblasen jede Singularität auflösen können. Das führt uns zum nächsten Abschnitt:

5.8 Auflösung von Singularitäten durch wiederholtes Aufblasen

Wir beschränken uns hier auf Kurven (also nur für Dimension 2). Man kann den folgenden Satz auch allgemeiner formulieren, dies würde allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

Satz. *Sei $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ irreduzibel ("Formaler Kurvenzweig"). Dann gibt es eine endliche Folge von Quadratischen Transformationen, so dass die strikt Transformierte am Ende Multiplizität 1 hat.*

Beweis. Sei $m := \mathrm{mult}_0(f)$. Falls $m = 1$ ist, ist f ein glatter Zweig und die Behauptung stimmt. Andernfalls liefert uns die Puiseux-Entwicklung aus (3.8)

$$\begin{cases} x(t) = t^m \\ y(t) = t^M + ..., \end{cases} \tag{1}$$

wobei ... für höhere Terme steht und $M > m$. Wir betrachten nun das Zahlenpaar (m, M). Die Puiseux-Reihe der strikt Transformierten ist

$$QT : (\tilde{X}, \tilde{Y}) \mapsto (\tilde{X}, \tilde{X}\tilde{Y}) = (X, Y)$$

mit $\tilde{X}, \tilde{Y}$ als Variablen der Aufblasung. Weiter erhalten wir mit den Quadratischen Transformationen

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = t^m \\ \tilde{y}(t) = t^{M-m} + ... \end{cases} \tag{2}$$

Wenn (2) die Parametrisierung von $f(x,y) = 0$ ist, dann ist (1) die Parametrisierung von $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Wir sehen also, dass entweder $\tilde{m} < m$ oder $\tilde{m} = m$ und $\tilde{M} = M - m < M$ sein muss. Wir erinnern uns an dieser Stelle, dass $m < M$. Nach endlich vielen Schritten fällt also irgendwann m und damit wird $\tilde{m}$ nach erneut endlich vielen Schritten 1. □

Wir erhalten als direkte Folgerung das folgende Korollar:

Korollar. *Für jede Kurve $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ existiert eine endliche Folge von Aufblasungen, so dass die strikt transformierte Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$ glatt ist.*

Beweis. **1)** Wir blasen alle Singularitäten so oft auf, bis alle Zweige glatt sind.

2) Wenn für zwei glatte Zweige C und C' $I(C, C'; p) = n$ gilt, so trennen C und C' sich nach n-facher Aufblasung, wie auch Beispiel 3) deutlich macht.

□

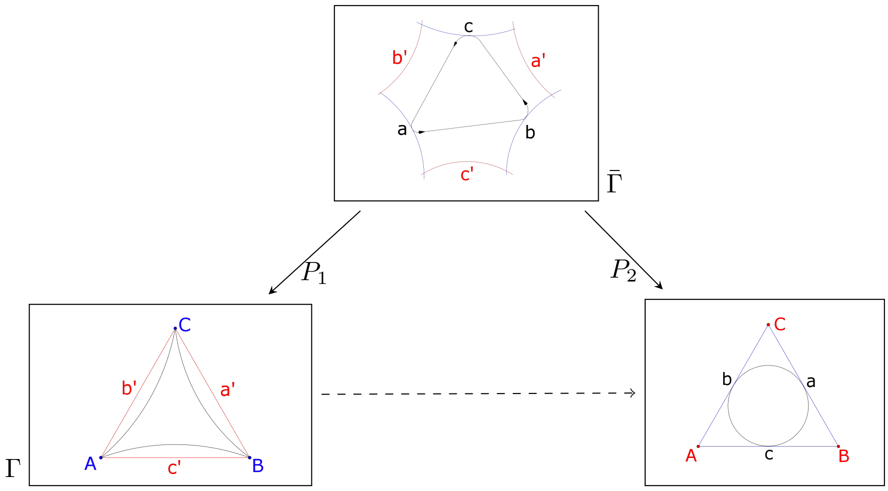
Für ein glattes $\mathcal{C}$ erhalten wir dann folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{C}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho"] & \tilde{\mathbb{P}}^2 \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Also gilt $\#\rho^{-1}(p) = \#$ Zweige von $\mathcal{C}$ bei p.

5.9 Cremona-Transformation als Aufblasung

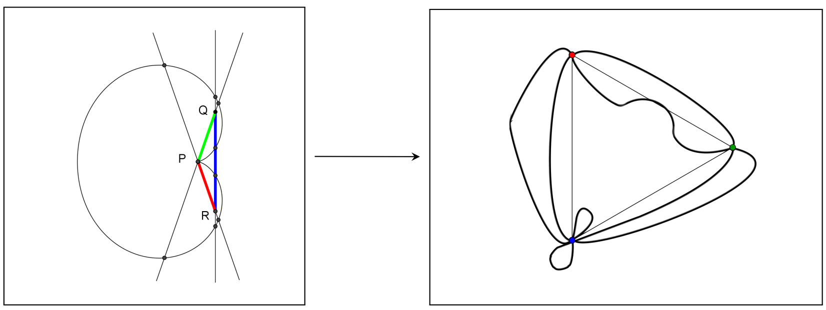
Sei $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ und $C = C_{A,B,C}$. Man kann die Cremona-Transformation mit Hilfe von Aufblasungen wie folgt verstehen:



wobei $P_1^{-1}(A) = a$, etc. und $P_2^{-1}(A') = a'$, etc. Desweiteren ist $\Gamma = \{(P, C(P)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 | P \in \mathbb{P}^2 \; \{A, B, C\}\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

Satz. *Jede Kurve $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ kann durch eine Folge von Cremona-Transformationen in eine Kurve $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{P}^2$ mit nur gewöhnlichen Singularitäten transformiert werden.*

Beweis. Wir werden den Beweis hier nicht im Detail behandeln. Viel mehr werden wir eine Beweisidee angeben. Eine ausführliche Darstellung ist sehr umfangreich und würde an dieser Stelle zu weit führen. Nach endlich often Anwenden einer Cremona-Transformation erhalten wir aus einer nicht gewöhnlichen Singularität mehrere gewöhnliche Singularitäten. Wir wählen Q und R, so dass $|PQ|$ und $|PR|$ nur in P eine Singularität von $\mathcal{C}$ schneidet. Dabei liefern für eben solche allgemeine Q und R genau die Schnittpunkte von $\mathcal{C}$ mit den Geraden $|PQ|$ und $|PR|$ durch die Cremona-Transformation die gewöhnlichen Singularitäten. Wenn wir annehmen, dass P eine nicht gewöhnliche Singularität von $\mathcal{C}$ ist, dann können wir an dieser Stelle eine Cremona-Transformation durchführen.



Wenn wir dies für alle Singularitäten durchführen, erhalten wir eine Folge von Cremona-Transformationen, die uns eine Kurve mit nur noch gewöhnlichen Singularitäten liefert. □